



ANALISIS KESTABILAN DAN KEUNTUNGAN MAKSIMAL PADA MODEL PERTUMBUHAN POPULASI MANGSA-PEMANGSA DENGAN TAHAPAN STRUKTUR

Syamsuddin Toaha¹

¹*Jurusan Matematika FMIPA, Universitas Hasanuddin,
Makassar, Sulawesi Selatan*

syamsuddint@yahoo.com

Artikel ini membahas model pertumbuhan populasi mangsa-pemangsa. Model menyatakan laju pertumbuhan tiga populasi, yaitu populasi mangsa, populasi pemangsa belum dewasa, dan populasi pemangsa sudah dewasa. Perubahan ukuran populasi mangsa dipengaruhi oleh pertumbuhan intrinsik dan interaksinya dengan populasi pemangsa dewasa. Perubahan ukuran populasi pemangsa dewasa dipengaruhi oleh interaksinya dengan populasi mangsa, kematian alamiah, dan perpindahan populasi pemangsa belum dewasa menjadi pemangsa dewasa. Perubahan populasi pemangsa belum dewasa dipengaruhi oleh jumlah kelahiran dari populasi pemangsa dewasa, kematian alamiah, dan perubahan populasi pemangsa menjadi pemangsa dewasa. Dinamika ketiga populasi tersebut dinyatakan dalam bentuk sistem persamaan differensial orde satu yang menyatakan perubahan ukuran populasi terhadap waktu. Dengan menganggap bahwa populasi yang ditinjau bernilai ekonomi, maka ketiga populasi tersebut dieksploitasi. Selanjutnya model melibatkan fungsi pemanenan pada perubahan ketiga populasi. Kewujudan titik ekuilibrium dari model beserta kestabilannya dianalisis dengan menggunakan metode linearisasi dan uji kestabilan Routh-Hurwitz. Hal ini dilakukan untuk menjamin ketiga populasi tidak akan punah dalam jangka waktu yang panjang. Selain itu, akan dianalisis usaha pemanenan optimal yang digunakan dalam mengeksploitasi populasi sehingga diperoleh keuntungan maksimal dan ketiga populasi tetap akan lestari dalam jangka waktu yang panjang. Beberapa kasus dianalisis yang disertai dengan simulasi numerik untuk mengetahui kestabilan titik ekuilibrium dan keuntungan maksimal. Hasil analisis menunjukkan bahwa kewujudan dan kestabilan titik ekuilibrium interior pada model ditentukan oleh nilai-nilai parameter model dan usaha pemanenan. Ketiga populasi dapat tetap lestari meskipun dieksploitasi dengan usaha pemanenan konstan dan sekaligus memberikan keuntungan maksimal.

Kata kunci: Model mangsa pemangsa, pemanenan, titik ekuilibrium, kestabilan, keuntungan maksimal

PENDAHULUAN

Model pertumbuhan populasi mangsa-pemangsa yang merujuk kepada model Lotka-Volterra merupakan salah model yang sangat populer dalam matematika ekologi. Luckinbill (1973) mempertimbangkan suatu model populasi mangsa-pemangsa dan menunjukkan bahwa populasi mangsa-pemangsa dapat hidup bersama untuk jangka waktu yang panjang jika kontak antara keduanya dikurangi.

Martin & Ruan (2001) dan Kar (2003) menyarankan bahwa sangat ideal untuk mengkaji faktor pemanenan pada model-model pertumbuhan populasi mangsa-pemangsa. Kar & Chauduri (2004) mengkaji model mangsa-pemangsa yang merujuk kepada model Lotka-Volterra dengan mempertimbangkan pengaruh pemanenan. Mereka mengkaji kemungkinan kewujudan ekuilibrium bioekonomik dan pemanenan optimal. Holmberg (1995) meneliti pengaruh pemanenan dengan kuota konstan dan usaha konstan. Hasil penelitian menunjukkan bahwa tangkapan dengan kuota konstan dapat mengakibatkan osilasi dan kacau serta menaikkan resiko eksploitasi yang berlebihan. Sistem satu mangsa dan satu pemangsa dalam Hogart et.al. (1992)

meninjau kedua populasi mangsa dan pemangsa dipanen dengan hasil tangkapan konstan dan diperoleh kestabilan pada hasil maksimal yang lestari.

Model dinamika populasi mangsa-pemangsa memainkan peran yang penting dalam bioekonomik, khususnya dalam manajemen sumberdaya yang terbarukan. Contoh manajemen sumber daya terbarukan adalah populasi ikan. Tangkapan optimal berkelanjutan yang berdasarkan pada kriteria biaya bertujuan untuk memaksimalkan keuntungan. Model dinamika populasi yang akurat melibatkan pemanenan membuat model menjadi sangat kompleks. Beberapa faktor yang perlu dipertimbangkan dalam membuat model dinamika populasi yang kompleks adalah ukuran populasi, laju pertumbuhan, kapasitas bawaan, kompetitor, biaya operasional pemanenan, harga tangkapan, dan sebagainya, Clark (1990).

Beberapa peneliti seperti Zhang et al. (2000), Kaili & Xinyu (2003), dan Xu et al. (2004), mengembangkan model mangsa-pemangsa dengan memperhatikan tahapan struktur pada populasi. Sun et al. (2008) mengembangkan model dengan tahapan struktur yang mempertimbangkan respon fungsional dan kebijakan pemanenan optimal. Kar & Chattopadhyay (2010) mengkaji model dengan tahapan struktur dan menghubungkannya dengan kebijakan pemanenan optimal. Problem kombinasi pemanenan telah dikaji secara mendalam oleh Chauduri (1998). Problem kebijakan pemanenan optimal dalam beberapa model yang melibatkan pemanenan juga telah dikaji oleh Sutinen dan Anderson (1985) dan Kar dan Chauduri (2002).

Tulisan ini menganalisis suatu model pertumbuhan populasi mangsa-pemangsa dengan struktur pada populasi pemangsa berdasarkan model Lotka-Volterra dengan melibatkan usaha pemanenan konstan. Analisis pada model ini difokuskan pada hubungan antara titik ekuilibrium interior yang stabil dengan keuntungan maksimal dan usaha pemanenan optimal.

MODEL POPULASI MANGSA-PEMANGSA DENGAN TAHAPAN STRUKTUR

Model yang ditinjau adalah model pertumbuhan populasi yang melibatkan tiga populasi, yaitu populasi mangsa, populasi pemangsa belum dewasa, dan populasi pemangsa sudah dewasa. Model dinamika populasi mangsa-pemangsa melibatkan dua populasi pemangsa dengan tahapan struktur telah ditinjau oleh Kar & Chattopadhyay (2010) dengan beberapa asumsi yang berbeda.

Model pertumbuhan populasi mangsa-pemangsa dinyatakan sebagai

$$\begin{aligned}
\frac{dN_1}{dt} &= r_1 N_1 \left(1 - \frac{N_1}{K}\right) - \alpha_1 N_1 N_3 \\
\frac{dN_2}{dt} &= -r_2 N_2 + \beta_2 N_3 - \gamma_2 N_2 \\
\frac{dN_3}{dt} &= -r_3 N_3 + \gamma_2 N_2 + m\alpha_1 N_1 N_3.
\end{aligned} \tag{1}$$

$N_1 = N_1(t)$ menyatakan ukuran populasi mangsa pada saat t , $N_2 = N_2(t)$ menyatakan ukuran populasi pemangsa belum dewasa pada saat t , dan $N_3 = N_3(t)$ menyatakan ukuran populasi pemangsa dewasa pada saat t . Model (1) merupakan model dinamika pada populasi mangsa dan pemangsa dengan tahapan struktur karena melibatkan populasi pemangsa belum dewasa dan populasi pemangsa sudah dewasa. Pertumbuhan populasi mangsa mengacu pada model pertumbuhan logistik dengan laju pertumbuhan intrinsik sebesar r_1 dan kapasitas batas K .

Laju kelahiran untuk populasi pemangsa belum dewasa proporsional dengan ukuran populasi pemangsa dewasa dengan konstanta proporsionalitas β_2 . Laju kematian untuk populasi pemangsa belum dewasa dan populasi pemangsa dewasa dinyatakan oleh r_2 dan r_3 . Parameter α_1 menyatakan laju konversi dari interaksi populasi mangsa dan populasi pemangsa dewasa yang bersifat predasi dan nilai parameter m memenuhi $0 < m < 1$. Parameter γ_2 menyatakan laju konversi populasi pemangsa belum dewasa menjadi pemangsa dewasa.

Dengan asumsi bahwa ketiga populasi yang ditinjau merupakan populasi (stok) yang bermanfaat bagi manusia, maka ketiga populasi tersebut selanjutnya dieksploitasi dengan laju penangkapan proporsional dengan masing-masing ukuran populasi. Dengan pertimbangan tersebut, model (1) dikembangkan menjadi

$$\begin{aligned}
\frac{dN_1}{dt} &= r_1 N_1 \left(1 - \frac{N_1}{K}\right) - \alpha_1 N_1 N_3 - q_1 E_1 N_1 \\
\frac{dN_2}{dt} &= -r_2 N_2 + \beta_2 N_3 - \gamma_2 N_2 - q_2 E_2 N_2 \\
\frac{dN_3}{dt} &= -r_3 N_3 + \gamma_2 N_2 + m\alpha_1 N_1 N_3 - q_3 E_3 N_3.
\end{aligned} \tag{2}$$

Parameter q_1 , q_2 , dan q_3 masing-masing menyatakan koefisien ketertangkapan untuk populasi mangsa, populasi pemangsa belum dewasa, dan populasi pemangsa dewasa. Parameter E_1 , E_2 , dan E_3 masing-masing menyatakan usaha (*effort*) penangkapan yang dikenakan pada populasi mangsa, populasi

pemangsa belum dewasa, dan populasi pemangsa dewasa serta memenuhi $0 \leq E_i \leq E_{maks}$ untuk $i = 1, 2, 3$.

Dengan memisalkan $\alpha_3 = m\alpha_1$, $q_4 = r_1 - q_1E_1$, $q_5 = r_2 + \gamma_2 + q_2E_2$, dan $q_6 = r_3 + q_3E_3$, model (2) dinyatakan dalam bentuk

$$\begin{aligned}\frac{dN_1}{dt} &= q_4N_1 - r_4N_1^2 - \alpha_1N_1N_3 \\ \frac{dN_2}{dt} &= -q_5N_2 + \beta_2N_3 \\ \frac{dN_3}{dt} &= -q_6N_3 + \gamma_2N_2 + \alpha_3N_1N_3.\end{aligned}\tag{3}$$

Model (3) mempunyai tiga titik ekuilibrium, yaitu $EQ_1 = (0, 0, 0)$, $EQ_2 = \left(\frac{q_4}{r_4}, 0, 0\right)$,

dan $EQ_3 = \left(\frac{p_5}{\alpha_3q_5}, \frac{\beta_2p_6}{\alpha_1\alpha_3q_5^2}, \frac{\beta_2p_6}{\alpha_1\alpha_3q_5}\right)$, dengan $p_5 = q_5q_6 - \beta_2\lambda_2$ dan

$p_6 = q_4\alpha_3q_5 - p_5r_4$. Titik EQ_3 merupakan titik interior jika $p_5 = q_5q_6 - \beta_2\lambda_2 > 0$ dan $p_6 = q_4\alpha_3q_5 - p_5r_4 > 0$, yaitu keadaan dimana ketiga komponen titik tersebut bernilai positif.

ANALISIS KESTABILAN TITIK EKUILIBRIUM

Pada model (3) hanya titik ekuilibrium interior, yaitu titik EQ_3 yang akan dianalisis kestabilannya karena pada titik ekuilibrium ini keadaan ukuran populasi mangsa, populasi pemangsa belum dewasa, dan populasi pemangsa dewasa dalam kondisi bernilai positif. Analisis kestabilan titik ekuilibrium dilakukan dengan metode pelinearan dan penentuan kestabilan dengan memperhatikan nilai eigen yang diperoleh dari matriks Jacobi yang dievaluasi pada titik EQ_3 .

Dari model (3) diperoleh matriks Jacobian

$$J = \begin{pmatrix} q_4 - 2r_4N_1 - \alpha_1N_3 & 0 & -\alpha_1N_1 \\ 0 & -q_5 & \beta \\ \alpha_3N_3 & \gamma_2 & -q_6 + \alpha_3N_1 \end{pmatrix}.$$

Dengan mengevaluasi matriks Jacobian J pada titik $EQ_3 = (N_{1E}, N_{2E}, N_{3E})$ diperoleh

$$J_E = \begin{pmatrix} q_4 - 2r_4N_{1E} - \alpha_1N_{3E} & 0 & -\alpha_1N_{1E} \\ 0 & -q_5 & \beta \\ \alpha_3N_{3E} & \gamma_2 & -q_6 + \alpha_3N_{1E} \end{pmatrix}.$$

Selanjutnya diperoleh persamaan karakteristik $f(\lambda) = \det(\lambda I - J_E)$, yaitu $f(\lambda) = \lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0$, dimana

$$a_2 = q_5 + q_6 - \alpha_3 N_{1E} + 2r_4 N_{1E} + \alpha_1 N_{3E} - q_4,$$

$$a_1 = q_4 \alpha_3 N_{1E} + 2r_4 q_5 N_{1E} - 2r_4 \alpha_3 N_{1E}^2 + \alpha_1 q_6 N_{3E} + \alpha_1 q_5 N_{3E} + 2r_4 q_6 N_{1E} + q_5 q_6 - q_5 \alpha_3 N_{1E} - q_4 q_6 - \beta_2 \gamma_2 - q_4 q_5,$$

$$a_0 = -\alpha_1 \beta_2 \gamma_2 N_{3E} - 2r_4 \beta_2 \gamma_2 N_{1E} + \alpha_3 q_4 q_5 N_{1E} - q_4 q_5 q_6 + q_4 \beta_2 \gamma_2 + 2r_4 q_5 q_6 N_{1E} - 2r_4 \alpha_3 q_5 N_{1E}^2 + \alpha_1 q_5 q_6 N_{3E}.$$

Menurut kriteria kestabilan Routh-Hurwitz titik EQ_3 stabil asimtotik jika dan hanya jika $a_0 > 0$, $a_2 > 0$, dan $a_2 a_1 - a_0 > 0$, Jeffries (1989).

KEUNTUNGAN MAKSIMAL PADA TITIK EKUILIBRIUM INTERIOR

Titik ekuilibrium EQ_3 yang stabil asimtotik selanjutnya dihubungkan dengan persoalan keuntungan maksimal. Dengan pertimbangan bahwa ketiga populasi yang ditinjau bernilai ekonomi dan selanjutnya dieskplotasi maka tentunya melibatkan biaya yang digunakan dalam usaha pemanenan dan hasil tangkapan memberikan pendapatan. Untuk keperluan tersebut didefinisikan fungsi biaya total dan fungsi penerimaan total. Fungsi biaya diasumsikan proporsional dengan usaha pemanenan yang dilakukan, yaitu $TC = cE$ dimana c menyatakan unit biaya pemanenan. Fungsi penerimaan didefinisikan sebagai $TR = pY(E)$, dimana p menyatakan unit harga stok dan $Y(E, N) = qEN$ menyatakan hasil pemanenan. Dengan demikian diperoleh fungsi keuntungan sebagai $\pi = TR - TC$. Titik ekuilibrium $EQ_3 = (N_{1E}, N_{2E}, N_{3E})$ bergantung pada usaha pemanenan yang dilakukan. Dengan demikian fungsi keuntungan bergantung kepada usaha pemanenan, yaitu $\pi(E) = TR(E) - TC(E)$. Pada keadaan ini, nilai-nilai usaha pemanenan akan ditentukan sehingga memberikan keuntungan maksimal dan titik ekuilibrium yang bersesuaian dengan usaha pemanenan tersebut juga stabil asimtotik.

Kasus 1 ($E = E_1 = E_2 = E_3$)

Pada kasus 1, usaha pemanenan yang dikenakan pada setiap populasi adalah sama. Dengan demikian, titik $EQ_3 = (N_{1E}, N_{2E}, N_{3E})$ berada pada oktan pertama jika

(i) $p_5 = q_5 q_6 - \beta_2 \lambda_2 > 0$ dan (ii) $p_6 = q_4 \alpha_3 q_5 - p_5 r_4 > 0$. Syarat (i) dapat dinyatakan sebagai $A_1 E^2 + B_1 E + C_1 > 0$ dengan $A_1 = q_2 q_3 > 0$, $B_1 = r_3 q_2 + \gamma_2 q_3 + r_2 q_3 > 0$,

dan $C_1 = r_2 r_3 + r_3 \gamma_2 - \gamma_2 \beta_2$. Syarat (ii) dapat dinyatakan sebagai $-A_2 E^2 + B_2 E + C_2 > 0$ dengan

$$A_2 = \alpha_3 q_1 q_2 + \frac{r_1 q_2 q_3}{K} > 0,$$

$$B_2 = -\alpha_3 q_1 (r_2 + \gamma_2) + \alpha_3 q_2 r_1 - \frac{r_1 (r_3 q_2 + q_3 (r_2 + \gamma_2))}{K}, \text{ dan}$$

$$C_2 = \frac{r_1 (\gamma_2 \beta_2 - r_3 (r_2 + \gamma_2))}{K}.$$

Dengan asumsi bahwa terdapat nilai E yang memenuhi syarat (i) dan (ii) serta memenuhi $0 \leq E \leq E_{maks}$ maka titik $EQ_3 = (N_{1E}, N_{2E}, N_{3E})$ berada pada oktan pertama.

Fungsi keuntungan yang bersesuaian dengan titik $EQ_3 = (N_{1E}, N_{2E}, N_{3E})$ diberikan sebagai $\pi(E) = (p_1 q_1 N_{1E} + p_2 q_2 N_{2E} + p_3 q_3 N_{3E})E - (c_1 + c_2 + c_3)E$ dimana p_1, p_2, p_3 menyatakan harga per unit stok dan c_1, c_2, c_3 menyatakan biaya. Pada fungsi keuntungan tersebut nilai N_{1E}, N_{2E} , dan N_{3E} bergantung pada E . Selanjutnya akan ditentukan nilai E yang memenuhi syarat (i) dan (ii) serta $0 \leq E \leq E_{maks}$ yang memaksimalkan $\pi(E)$ dan titik $EQ_3 = (N_{1E}, N_{2E}, N_{3E})$ stabil asimptotik.

Contoh 1. Diberikan parameter untuk model (3) dengan nilai $r_1 = 1,5$, $r_2 = 0,2$, $r_3 = 0,2$, $K = 1.000$, $\beta_2 = 0,5$, $\alpha_1 = 0,001$, $m = 0,5$, $\lambda_2 = 0,05$, $q_1 = 0,1$, $q_2 = 0,2$, dan $q_3 = 0,2$. Demikian pula diberikan nilai $p_1 = 1,1$, $p_2 = 1,2$, $p_3 = 1,3$, $c_1 = 0,1$, $c_2 = 0,2$, dan $c_3 = 0,3$. Dengan nilai parameter tersebut diperoleh titik $EQ_3 = (N_{1E}, N_{2E}, N_{3E})$,

$$\text{dengan } N_{1E} = \frac{200(5 + 18E + 8E^2)}{5 + 4E}, \quad N_{2E} = \frac{1000(60 + E - 28E^2)}{25 + 40E + 16E^2}, \quad \text{dan}$$

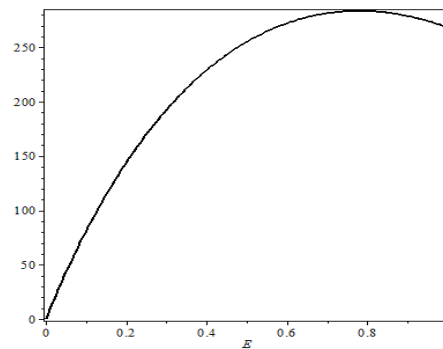
$$N_{3E} = \frac{100(60 + E - 28E^2)}{5 + 4E}. \text{ Titik } EQ_3 \text{ merupakan titik interior jika nilai } E \text{ memenuhi}$$

(i) $5 + 18E + 8E^2 > 0$ dan (ii) $60 + E - 28E^2 > 0$. Dari syarat (i) diperoleh $\max\{0, -0,3246\} \leq E \leq E_{maks}$ dan dari syarat (ii) diperoleh $\max\{0, -1,4461\} \leq E \leq \min\{E_{maks}, 1,4818\}$. Dengan mengambil nilai $E_{maks} = 1$, maka diperoleh syarat $0 \leq E \leq 1$ sehingga titik EQ_3 merupakan titik interior.

Fungsi keuntungan yang bersesuaian dengan titik EQ_3 diberikan oleh $\pi(E) = (p_1 q_1 N_{1E} + p_2 q_2 N_{2E} + p_3 q_3 N_{3E})E - (c_1 + c_2 + c_3)E$. Dengan nilai parameter yang diberikan dan nilai pada titik ekuilibrium maka diperoleh

$$\pi(E) = \frac{-0,1000E(-2,27425 \times 10^5 - 90.180E + 77.968E^2 + 22.080E^3)}{(5 + 4E)^2}$$

Plot kurva fungsi keuntungan $\pi(E)$ diberikan pada Gambar 1. Perhatikan titik kritis fungsi keuntungan pada interval $0 \leq E \leq 1$ diperoleh titik kritis $E_* = 0,77855$ yang memaksimalkan fungsi keuntungan dengan $\pi(E_*) = 285,50965$.



Gambar 1. Fungsi keuntungan

Selanjutnya dengan mengambil nilai usaha pemanenan sebesar $E = E_* = 0,77855$ diperoleh titik $EQ_3 = (588,1804, 665,3440, 539,8741)$. Persamaan karakteristik yang bersesuaian dengan titik ekuilibrium tersebut diberikan oleh $f(\lambda) = \lambda^3 + 1,34960\lambda^2 + 0,57108\lambda + 0,0644$ dengan nilai eigen $-0,5861137 \pm 0,14011431i$ dan $-0,1773738$. Hal ini bermakna bahwa dengan mengaplikasikan nilai usaha pemanenan sebesar $E = E_* = 0,77855$ maka ketiga populasi mangsa-pemangsa yang dieksploitasi dengan usaha pemanenan konstan tetap akan lestari dalam waktu yang panjang dan juga memberikan keuntungan maksimal.

Kasus 2 ($E_3 = E_2$)

Pada kasus 2, usaha pemanenan yang dikenakan sama untuk populasi pemangsa belum dewasa dan populasi pemangsa dewasa. Dengan demikian, titik $EQ_3 = (N_{1E}, N_{2E}, N_{3E})$ berada pada oktan pertama jika memenuhi (i) $p_5 = q_5 q_6 - \beta_2 \lambda_2 > 0$ dan (ii) $p_6 = q_4 \alpha_3 q_5 - p_5 r_4 > 0$. Syarat (i) dapat dinyatakan

sebagai $A_3 E_2^2 + B_3 E_2 + C_3 > 0$ dengan $A_3 = q_2 q_3 > 0$,
 $B_3 = r_3 q_2 + \gamma_2 q_3 + r_2 q_3 > 0$, dan $C_3 = r_2 r_3 + r_3 \gamma_2 - \gamma_2 \beta_2$. Syarat (ii) dinyatakan

sebagai $\alpha_3 (r_2 + \gamma_2 + q_2 E_2) (r_1 - q_1 E_1) - \frac{r_1}{K} ((r_3 + q_3 E_2) (r_2 + \gamma_2 + q_2 E_2) - \gamma_2 \beta_2) > 0$.

Dengan asumsi bahwa terdapat pasangan (E_1, E_2) yang memenuhi syarat (i) dan (ii) serta memenuhi $0 \leq E_1 \leq E_{1maks}$ dan $0 \leq E_2 \leq E_{2maks}$ maka titik $EQ_3 = (N_{1E}, N_{2E}, N_{3E})$ berada pada oktan pertama.

Fungsi keuntungan yang bersesuaian dengan titik $EQ_3 = (N_{1E}, N_{2E}, N_{3E})$ diberikan sebagai

$$\pi(E_1, E_2) = (p_1 q_1 N_{1E}) E_1 + (p_2 q_2 N_{2E} + p_3 q_3 N_{3E}) E_2 - (c_1 E_1 + (c_2 + c_3) E_2)$$

dimana p_1, p_2, p_3 menyatakan harga per unit stok dan c_1, c_2, c_3 menyatakan biaya. Pada fungsi keuntungan tersebut nilai N_{1E}, N_{2E} , dan N_{3E} bergantung pada E_1 dan E_2 . Selanjutnya akan ditentukan nilai E_1 dan E_2 yang memenuhi syarat (i) dan (ii) serta $0 \leq E_1 \leq E_{1maks}$ dan $0 \leq E_2 \leq E_{2maks}$ yang memaksimalkan nilai $\pi(E_1, E_2)$ dan titik $EQ_3 = (N_{1E}, N_{2E}, N_{3E})$ stabil asimptotik.

Contoh 2. Diberikan parameter untuk model (3) dengan nilai $r_1 = 1,5$, $r_2 = 0,2$, $r_3 = 0,2$, $K = 1.000$, $\beta_2 = 0,5$, $\alpha_1 = 0,001$, $m = 0,5$, $\lambda_2 = 0,05$, $q_1 = 0,1$, $q_2 = 0,2$, dan $q_3 = 0,2$. Demikian pula diberikan nilai $p_1 = 1,1$, $p_2 = 1,2$, $p_3 = 1,3$, $c_1 = 0,1$, $c_2 = 0,2$, dan $c_3 = 0,3$. Dengan nilai parameter tersebut diperoleh titik $EQ_3 = (N_{1E}, N_{2E}, N_{3E})$, dengan

$$N_{1E} = \frac{200(5 + 18E_2 + 8E_2^2)}{5 + 4E_2}, \quad N_{2E} = \frac{1000(60 + 6E_2 - 24E_2^2 - 5E_1 - 4E_2E_1)}{25 + 40E_2 + 16E_2^2}, \text{ dan}$$

$$N_{3E} = \frac{100(60 + 6E_2 - 24E_2^2 - 5E_1 - 4E_2E_1)}{5 + 4E_2}.$$

Titik EQ_3 merupakan titik interior jika nilai E memenuhi (i) $5 + 18E_2 + 8E_2^2 > 0$ dan (ii) $(60 + 6E_2 - 24E_2^2 - 5E_1 - 4E_2E_1) > 0$. Dari syarat (i) diperoleh $maks\{0, -0,3246\} \leq E_2 \leq E_{2maks}$. Dengan mengambil nilai $E_{1maks} = 1$ dan $E_{2maks} = 1$, maka titik EQ_3 merupakan titik interior jika $(E_1, E_2) \in D_1$, dimana

$$D_1 = \{(E_1, E_2) : 0 \leq E_1 \leq 1, 0 \leq E_2 \leq 1, 60 + 6E_2 - 24E_2^2 - 5E_1 - 4E_2E_1 > 0\}.$$

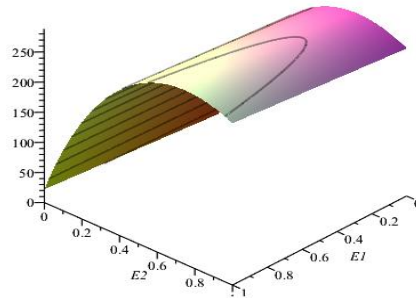
Fungsi keuntungan yang bersesuaian dengan titik EQ_3 diberikan oleh

$$\pi(E_1, E_2) = (p_1 q_1 N_{1E})E_1 + (p_2 q_2 N_{2E} + p_3 q_3 N_{3E})E_2 - (c_1 E_1 + (c_2 + c_3)E_2).$$

Dengan nilai parameter yang diberikan dan nilai pada titik ekuilibrium diperoleh

$$\pi(E_1, E_2) = \frac{0,1000}{(5 + 4E_2)^2} \left\{ 5.475E_1 + 5.660E_1E_2 + 4.624E_1E_2^2 + 2.880E_1E_2^3 + 2,21875 \times 10^5 E_2 + 84.400E_2^2 - 82.640E_2^3 - 24.960E_2^4 \right\}.$$

Plot permukaan fungsi keuntungan $\pi(E_1, E_2)$ diberikan pada Gambar 2. Perhatikan titik kritis fungsi keuntungan pada daerah D_1 diperoleh titik kritis $(E_1^*, E_2^*) = (1, 0,74932)$ yang memaksimalkan fungsi keuntungan dengan $\pi(E_1^*, E_2^*) = 288,52516$.



Gambar 1. Permukaan fungsi keuntungan

Selanjutnya dengan mengambil nilai usaha pemanenan sebesar $(E_1^*, E_2^*) = (1, 0,74932)$ diperoleh titik $EQ_3 = (574,6855, 672,6934, 537,9717)$. Persamaan karakteristik yang bersesuaian dengan titik ekuilibrium tersebut diberikan oleh $f(\lambda) = \lambda^3 + 1,32441\lambda^2 + 0,55317\lambda + 0,06181$ dengan nilai eigen $-0,57413 \pm 0,14578i$ dan $-0,17615$. Hal ini bermakna bahwa dengan mengaplikasikan nilai usaha pemanenan sebesar $E_1^* = 1$ dan $E_2^* = 0,74932$ maka ketiga populasi mangsa dan pemangsa yang dieksplotasi dengan usaha pemanenan konstan akan tetap lestari untuk waktu yang panjang dan juga memberikan keuntungan maksimal.

Kasus 3 ($E_1 \neq E_2 \neq E_3$)

Pada kasus 3, usaha pemanenan yang dikenakan untuk ketiga populasi tidak sama. Dengan demikian, titik $EQ_3 = (N_{1E}, N_{2E}, N_{3E})$ berada pada oktan pertama jika

memenuhi (i) $p_5 = q_5 q_6 - \beta_2 \lambda_2 > 0$ dan (ii) $p_6 = q_4 \alpha_3 q_5 - p_5 r_4 > 0$. Selanjutnya syarat (i) dan (ii) dapat dinyatakan sebagai $(r_3 + q_3 E_3)(r_2 + \gamma_2 + q_2 E_2) - \gamma_2 \beta_2 > 0$ dan $\alpha_3(r_2 + \gamma_2 + q_2 E_2)(r_1 - q_1 E_1) - \frac{r_1}{K}((r_3 + q_3 E_3)(r_2 + \gamma_2 + q_2 E_2) - \gamma_2 \beta_2) > 0$. Dengan asumsi bahwa terdapat pasangan (E_1, E_2, E_3) yang memenuhi syarat (i) dan (ii) serta memenuhi $0 \leq E_i \leq E_{maks}$ untuk $i = 1, 2, 3$, maka titik $EQ_3 = (N_{1E}, N_{2E}, N_{3E})$ berada pada oktan pertama.

Fungsi keuntungan yang bersesuaian dengan titik $EQ_3 = (N_{1E}, N_{2E}, N_{3E})$ diberikan sebagai

$$\pi(E_1, E_2) = (p_1 q_1 N_{1E})E_1 + (p_2 q_2 N_{2E})E_2 + (p_3 q_3 N_{3E})E_3 - (c_1 E_1 + c_2 E_2 + c_3 E_3)$$

dimana p_1, p_2, p_3 menyatakan harga per unit stok dan c_1, c_2, c_3 menyatakan biaya. Pada fungsi keuntungan tersebut nilai N_{1E}, N_{2E} , dan N_{3E} bergantung pada E_1, E_2 , dan E_3 . Selanjutnya akan ditentukan nilai E_1, E_2 , dan E_3 yang memenuhi syarat (i) dan (ii) serta $0 \leq E_i \leq E_{maks}$ untuk $i = 1, 2, 3$ yang memaksimalkan nilai $\pi(E_1, E_2, E_3)$ dan titik $EQ_3 = (N_{1E}, N_{2E}, N_{3E})$ stabil asimptotik.

Contoh 3. Diberikan parameter untuk model (3) dengan nilai $r_1 = 1,5$, $r_2 = 0,2$, $r_3 = 0,2$, $K = 1.000$, $\beta_2 = 0,5$, $\alpha_1 = 0,001$, $m = 0,5$, $\lambda_2 = 0,05$, $q_1 = 0,1$, $q_2 = 0,2$, dan $q_3 = 0,2$. Demikian pula diberikan nilai $p_1 = 1,1$, $p_2 = 1,2$, $p_3 = 1,3$, $c_1 = 0,1$, $c_2 = 0,2$, dan $c_3 = 0,3$. Dengan nilai parameter tersebut diperoleh titik $EQ_3 = (N_{1E}, N_{2E}, N_{3E})$, dengan

$$N_{1E} = \frac{200(5 + 8E_2 + 10E_3 + 8E_2E_3)}{5 + 4E_2},$$

$$N_{2E} = \frac{1000(60 + 36E_2 - 30E_3 - 24E_2E_3 - 5E_1 - 4E_2E_1)}{25 + 40E_2 + 16E_2^2}, \text{ dan}$$

$$N_{3E} = \frac{100(60 + 36E_2 - 30E_3 - 24E_2E_3 - 5E_1 - 4E_2E_1)}{5 + 4E_2}.$$

Titik EQ_3 merupakan titik interior jika nilai E memenuhi (i) $5 + 8E_2 + 10E_3 + 8E_2E_3 > 0$ dan (ii) $(60 + 36E_2 - 30E_3 - 24E_2E_3 - 5E_1 - 4E_2E_1) > 0$. Dengan mengambil nilai $E_{1maks} = 1$, $E_{2maks} = 1$ dan $E_{3maks} = 1$, maka titik EQ_3 merupakan titik interior jika $(E_1, E_2, E_3) \in D_2$, dimana

$$D_2 = \{(E_1, E_2, E_3) : 0 \leq E_1 \leq 1, 0 \leq E_2 \leq 1, 0 \leq E_3 \leq 1, 5 + 8E_2 + 10E_3 + 8E_2E_3 > 0, (60 + 36E_2 - 30E_3 - 24E_2E_3 - 5E_1 - 4E_2E_1) > 0\}.$$

Fungsi keuntungan yang bersesuaian dengan titik EQ_3 diberikan oleh

$$\pi(E_1, E_2) = (p_1 q_1 N_{1E})E_1 + (p_2 q_2 N_{2E})E_2 + (p_3 q_3 N_{3E})E_3 - (c_1 E_1 + c_2 E_2 + c_3 E_3).$$

Dengan nilai parameter yang diberikan dan nilai pada titik ekuilibrium tersebut diperoleh

$$\begin{aligned} \pi(E_1, E_2, E_3) = \frac{0,1000}{(5 + 4E_2)^2} \{ & 7.200E_1E_2E_3 + 2.880E_1E_2^2E_3 + 86.320E_2^2 + 37.080E_2E_3 + \\ & 1.160E_1E_2 - 20.208E_2^2E_3 - 2.576E_1E_2^2 + 4.500E_1E_3 - 39.000E_3^2 - \\ & 62.400E_2E_3^2 - 24.960E_2^2E_3^2 + 77.925E_3 + 1,4395 \times 10^5 E_2 + 5.475E_1 - \\ & 32E_2^2 \}. \end{aligned}$$

Dengan memperhatikan titik kritis fungsi keuntungan pada daerah D_2 diperoleh titik kritis $(E_1^*, E_2^*, E_3^*) = (1, 1, 0,43280)$ yang memaksimalkan fungsi keuntungan dengan $\pi(E_1^*, E_2^*, E_3^*) = 318,47671$.

Selanjutnya dengan mengambil nilai usaha pemanenan sebesar $(E_1^*, E_2^*, E_3^*) = (1, 1, 0,43280)$ diperoleh titik $EQ_3 = (462,0085, 785,5413, 706,9872)$. Persamaan karakteristik yang bersesuaian dengan titik ekuilibrium tersebut diberikan oleh $f(\lambda) = \lambda^3 + 1,19857\lambda^2 + 0,51367\lambda + 0,07349$ dengan nilai eigen $-0,44722 \pm 0,20406i$ dan $-0,30413$. Hal ini bermakna bahwa dengan mengaplikasikan nilai usaha pemanenan sebesar $E_1^* = 1$, $E_2^* = 1$, dan $E_3^* = 0,43280$ maka ketiga populasi mangsa dan pemangsa yang dieksploitasi dengan usaha pemanenan konstan akan tetap lestari untuk waktu yang panjang dan juga memberikan keuntungan maksimal.

KESIMPULAN

Dari model dinamika populasi mangsa-pemangsa dengan pemanenan usaha konstan pada masing-masing populasi dapat diperoleh satu titik ekuilibrium interior jika berlaku $q_5 q_6 - \beta_2 \lambda_2 > 0$, $q_4 \alpha_3 q_5 - p_5 r_4 > 0$ dan $0 \leq E_i \leq E_{maks}$ untuk $i = 1, 2, 3$. Titik ekuilibrium interior tersebut stabil jika memenuhi syarat kestabilan Routh-Hurwitz.

Dari hasil simulasi dalam kasus $E_1 = E_2 = E_3$, $E_3 = E_3$, dan $E_1 \neq E_2 \neq E_3$ diperoleh nilai usaha-usaha pemanenan yang optimal yang memberikan titik ekuilibrium interior $EQ_3 = (N_{1E}, N_{2E}, N_{3E})$ stabil asimptotik dan memberikan keuntungan maksimal dari usaha eksploitasi populasi mangsa dan populasi pemangsa.

Dari hasil analisis teoritis dan numerik disimpulkan bahwa kewujudan dan kestabilan titik ekuilibrium interior $EQ_3 = (N_{1E}, N_{2E}, N_{3E})$ ditentukan oleh besaran nilai usaha-usaha pemanenan yang diberikan. Ketiga populasi dapat tetap lestari meskipun dieksploitasi dengan usaha pemanenan konstan dan juga memberikan keuntungan maksimal.

DAFTAR PUSTAKA

- Chaudhuri, K. S. 1998. Dynamic optimization of combined harvesting of two species fishery. *Ecological Modelling*, 41, 17-25.
- Clark, C.W. 1990. *Mathematical Bioeconomics, The optimal management of renewable resources*, 2nd Ed., John Wiley & Sons, New York-Toronto.
- Hogarth, W.L., Norbury, J., Cuning, I. and Sommers, K. 1992. Stability of a predator-prey model with harvesting. *Ecological Modelling*. 62:83-106.
- Holmberg, J. 1995. Socio-ecological principles and indicators for sustainability, *PhD Thesis*, Goteborg University, Sweden.
- Jeffries, C. 1989. Mathematical modeling in ecology. Boston. Birkhauser.
- Kaili, Y. and Xinyu, S. 2003. Predator-prey system with stage structure and delay. *Applied Math. J. Chinese Univ. Ser. B*. 18(2):143-150.
- Kar, T.K. and Chaudhuri, K.S. (2002). On non-selective harvesting of a multispecies fishery. *Int. J. Math. Educ. Sci. Technol.* 33(4):543-556.
- Kar, T.K. 2003. Selective harvesting in a prey-predator fishery with time delay. *Mathematical and Computer Modelling*. 38:449-458.
- Kar, T.K. dan Chaudhuri, K.S. 2004. Harvesting in a two-prey one predator fishery: A bioeconomic model. *J. ANZIAM*. 45:443-456.
- Kar, T.K. and Chattopadhyay, S. K. 2010. A dynamic reaction model of a prey-predator system with stage-structure for predator. *Modern Applied Science*, 4, No.5: 183-195.
- Luckinbill, L.S. 1973. Coexistence in laboratory populations of paramecium aurelia and its predator didinium nasutum. *Journal of Ecology*. 54(6):1320-1327.
- Martin, A. and Ruan, S. 2001. Predator-prey models with time delay and prey harvesting. *J. Math. Biol.* 43:247-267.
- Sun, Z., Li, Y., Yang, H. and Lin, L. 2008. A stage-structure predator-prey model With functional response. *Applied Mathematical Sciences*. Vol.2 No.7, 333-339.
- Sutinen, J.G. and Anderson, P. (1985). The economics of fisheries law enforcement. *Land. Eco.* 61:387-397.
- Xu, Rui., Chaplain, M.A.J. and Davidson, F. A. 2004. Persistence and stability of a stage-structured predator-prey model with time delays, *Journal of Applied Mathematics and Computation*, 150, 259-277.
- Zhang, X., Chen, L., and Neumann, U. A. 2000. The stage-structured predator-prey model and optimal harvesting policy, *Mathematical Biosciences*, 168, 201-210.